BM 305 Biçimsel Diller ve Otomatlar (Formal Languages and Automata)

Hazırlayan: M.Ali Akcayol
Gazi Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Sets, Relations

- Bir küme nesnelerden oluşur

  $L = \{a, b, c, d\}$ a, b, c, d kümenin elemanları veya üyeleridir

  $b \in L$, $z \notin L$

- Elemanların sırası ve tekrarı önemli değildir

  $\{red, blue, red\}$ ile $\{red, blue\}$ aynıdır

  $\{3, 1, 9\}$, $\{9, 1, 3\}$ ve $\{3, 9, 1\}$ aynıdır

- Empty ve singleton

  Bir elemana sahip küme *singleton*, hiç elemanı olmayan küme *empty* olarak adlandırılır.

  $\{1\}$, $\{blue\}$ singleton

  $\{ \}$, $\varnothing$ empty set

Sets, Relations

- Sonsuz küme

  $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ doğal sayılar kümesi
- Kümeler özellikleriyle de tanımlanabilir

  $I = \{1, 3, 9\}$ $\quad$ $G = \{3, 9\}$

  $G = \{x: x \in I \text{ and } x \text{ is greater than } 2\}$

  $O = \{x: x \in N \text{ and } x \text{ is not divisible by } 2\}$ odd numbers
- Altküme

  $A \subseteq B$, A kümesi B kümesinin altkümesi ($A = B$ *olabilir*)

  $A \subset B$, A kümesi B kümesinin *proper* altkümesi ($A \neq B$)

Sets, Relations

- Union (Birleşim)

  $A \cup B = \{x: x \in A \text{ or } x \in B\}$
- Intersection (Kesişim)

  $A \cap B = \{x: x \in A \text{ and } x \in B\}$
- Difference (Fark)

  $A - B = \{x: x \in A \text{ and } x \notin B\}$

  $\{1, 3, 9\} - \{3, 5, 7\} = \{1, 9\}$
- Disjoint

  $A \cap B = \{\ \}, \varnothing$

Sets, Relations

- Küme işlemleri

Idempotency	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
Commutativity	$A \cup B = B \cup A$
(Değişme)	$A \cap B = B \cap A$
Associativity	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(İlişkisellik)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivity	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(Dağılma)	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Absorption	$(A \cup B) \cap A = A$
	$(A \cap B) \cup A = A$
DeMorgan's laws	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Sets, Relations

$S = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$, $A = \{a, b, c, d\}$

- Birden fazla kümede birleşim

  $\bigcup S = \{x: x \in P \text{ for some set } P \in S\}$ $\bigcup S = \{a, b, c, d\}$

- Birden fazla kümede kesişim

  $\bigcap S = \{x: x \in P \text{ for each set } P \in S\}$ $\bigcap S = \{b\}$

- Power set

  Bir kümenin boş kümede dahil tüm altkümeleri

  2^A, *A kümesinin power kümesi*

  $A = \{c, d\}$ *ise* $2^{\{c, d\}} = \{\{c, d\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset\}$

- Partition

  Π power kümenin altkümesidir, boş kümeyi içermez ve A kümesinin her elemanını sadece bir kez bulundurur

  - Π içindeki her eleman boş kümeden farklıdır
  - Π içindeki farklı elemanlar disjoint kümedir
  - $\bigcup \Pi = A$ $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$ partition, $\{\{b, c\}, \{c, d\}\}$ partition değil

Sets, Relations

- Ordered pair

  Nesneler arasındaki ilişkiler kümelerle gösterilmes *sıralı çiftler (ordered pair)* ile gösterilir

  (a, b) sıralı çifti için a ve b components olarak adlandırılır

  (a, b) ile $\{a, b\}$ farklıdır

  (a, b) ile (b, a) farklıdır. $\{a, b\}$ ile $\{b, a\}$ aynıdır

  İki sıralı çift (a, b) ve (c, d) eşittir eğer $a = c$ ve $b = d$ ise

- Cartesian product (Kartezyen çarpımı)

  A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı AxB ile gösterilir ve (a, b) sıralı çiftidir $(a \in A \text{ ve } b \in B)$

  $\{1, 3\} \times \{b, c\} = \{(1, b), (1, c), (3, b), (3, c)\}$

Sets, Relations

- Binary relation

  A ve B kümeleri arasında binary relation AxB 'nin altkümesidir

  Örnek:

  $\{1, 3\}$ *ve* $\{b, c\}$ kümeleri arasında $\{(1, b), (3, b)\}$ bir binary relation olarak tanımlanır.

  $\{(i, j): i, j \in N \text{ ve } i < j\}$ küçüktür ilişkisi olup NxN'nin altkümesidir

  $\{(1, 2), (1, 3), (2, 6), \ldots\}$ şeklinde sonsuz elemana sahiptir

- Tuples and relations

  $(a_1, a_2, a_3, \ldots., a_n)$ ordered tuple olarak adlandırılır (n-tuple)

  n= 2 için ordered pairs, *n= 3 için ordered triples*
  n= 4 için quadruples, *n= 5 için quintuples*

  n= 1 için unary relation *n= 2 için binary relation*
  n= 3 için ternary relation *n-ary relation*

Sets, Relations

- **Function**

  A ve B kümeleri arasında bir fonksiyon, binary relation $R = (a, b)$'dir ve her $a \in A$ için kesinlikle sadece bir ordered pair vardır.

  $f : A \rightarrow B$, A' dan B' ye tanımlanmış f fonksiyonu

- **Domain ve Image**

  A domain olarak adlandırılır

  $f(a)$ image olarak adlandırılır ve her a için unique değerdir

- **Arguments ve Value**

  $f : A_1 x A_2 x \; ... \; x A_n \rightarrow B$ fonksiyon ise $f(a_1, a_2, ..., a_n) = b$ şeklinde gösterilir ve $a_i \in A_i$, $i = 1, ..., n$ ve $b \in B$'dir.

  Burada a_i arguments ve b ise value olarak adlandırılır.

Sets, Relations

- **One-to-one**

  Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu one-to-one'dır eğer her farklı $a, a' \in A$ için $f(a) \neq f(a')$ ise

- **Onto**

  Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu onto'dur eğer B'nin her elemanı f fonksiyonu altında A'nın bazı elemanları için image ise

- **Bijection**

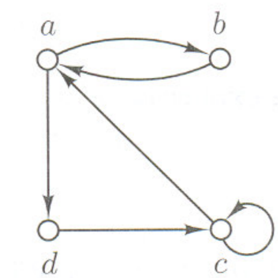
  Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu bijection'dir eğer f fonksiyonu hem one-to-one hemde onto ise

- **Inverse**

  $R \subseteq A$xB binary ilişkisinin tersi $R^{-1} \subseteq B$xA şeklinde tanımlanır

Sets, Relations

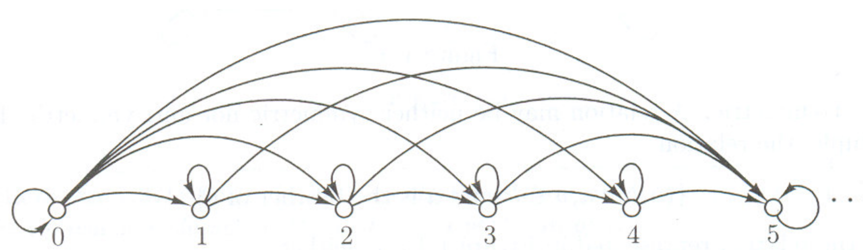
- Graph
  - A bir küme ve $R \subseteq A$xA ise A üzerinde bir binary ilişki olsun. Bu ilişki bir directed graph ile gösterilebilir.
  - Graph üzerinde her bir node A'nın bir elemanını gösterir.
  - Her $(a, b) \in R$ için a'dan b'ye bir ok (kenar - edge) çizilir.



$R = \{(a, b), (b, a), (a, d), (d, c), (c, c), (c, a)\}$ ilişkisine ait graph

Sets, Relations

- Graph



$R = \{(i, j): i, j \in N \text{ ve } i \leq j\}$ ilişkisine ait graph

Sets, Relations

- Reflexive

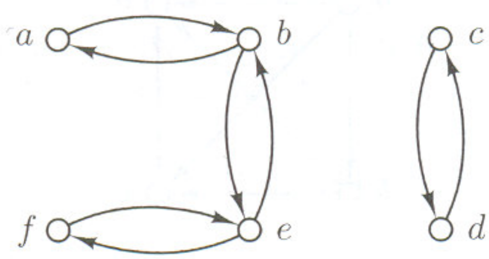
  Bir ilişki $R \subseteq AxA$ reflexive'dir eğer her bir $a \in A$ için $(a, a) \in R$ ise
  Figure 1 reflexive değildir ancak figure 2 reflexive'dir.

- Symmetric

  Bir ilişki $R \subseteq AxA$ symmetric'tir eğer $(a, b) \in R$ iken $(b, a) \in R$ *ise*

- Antisymmetric

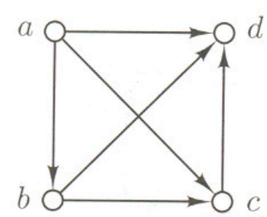
  Bir ilişki $R \subseteq AxA$ antisymmetric'tir eğer herhangi bir ordered pair $(a, b) \in R$ iken $(b, a) \notin R$ *ise*



Sets, Relations

- Transitive

  Bir ilişki $R \subseteq AxA$ transitive'dir eğer $(a, b) \in R$ ve $(b, c) \in R$ iken $(a, c) \in R$ ise



- Equivalence relation

  Bir ilişki reflexive, symmetric ve transitive ise equivalence relation olarak adlandırılır.

- Partial order

  Bir ilişki reflexive, antisymmetric ve transitive ise partial order olarak adlandırılır.

- Total order

  Bir partial order $R \subseteq AxA$ total order'dır eğer $a, b \in A$ iken $(a, b) \in R$ veya $(b, a) \in R$ ise

Sets, Relations

- Path

  Bir binary ilişkideki path(yol) $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sıralı serisidir ve bu seride her $(a_i, a_{i+1}) \in R$'dir.

- Length

  Bir yol $(a_1, a_2, ..., a_n)$ için length n'dir.

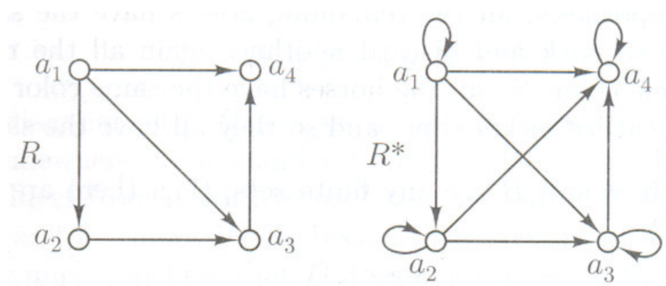
- Cycle

  Bir yol $(a_1, a_2, ..., a_n)$ cycle'dır eğer $(a_n, a_1) \in R$ ise ve tüm a_i'ler farklı ise

Sets, Relations

- Reflexive transitive closure

  Eğer bir R ilişkisi reflexive ve transitive değilken, R ilişkisini içeren R^* ilişkisi reflexive ve transitive ise, R^* ilişkisi R ilişkisinin reflexive transitive closure'u olarak adlandırılır. (R^* ilişkisi mümkün olan en az kenara sahiptir.)



- Tanım

  $R \subseteq A^2$' de tanımlı

  $R^* = \{(a, b) : a, b \in A$ ve R'de a' dan b'ye bir path(yol) varsa$\}$

Ödev

- Problemleri çözünüz 1.1.1 – 1.1.4 (sayfa 8-9)
- Problemleri çözünüz 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4, 1.3.7, 1.3.9 (sayfa 20-21)