Zeki Optimizasyon Teknikleri
Intelligent Optimization Techniques

Hazırlayan: M. Ali Akcayol
Gazi Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Bu dersin sunumları, “Singiresu S. Rao, Engineering Optimization: Theory and Practice, Wiley, 2009.” kitabı kullanılarak hazırlanmıştır.

İçerik

- Klasik optimizasyon
- Tek değişkenli optimizasyon
- Çok değişkenli optimizasyon

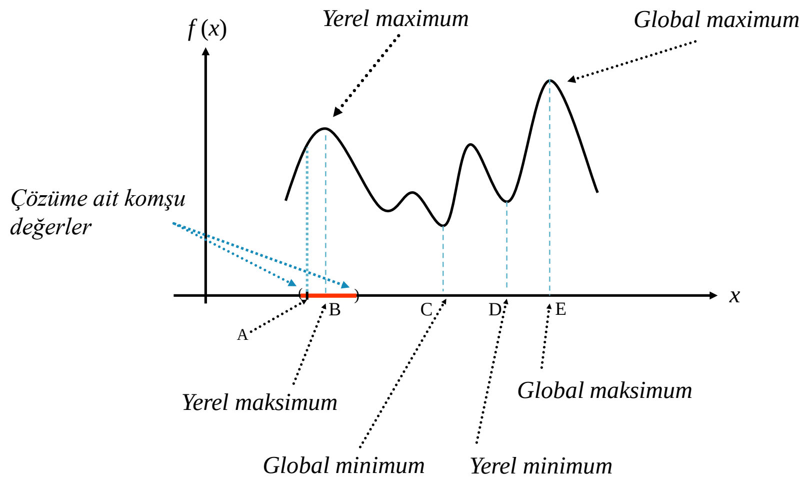
Klasik optimizasyon

- **Optimizasyon,** verilen şartlar altında en iyi sonucun elde edilmesi işidir.
- Optimizasyon alanındaki en önemli gelişmeler 18.yy'da Newton ve Lagrange tarafından yapılmıştır.
- **Bir sistemin planlanmasında amaç**, istenen **karı maksimize** ya da gerekli **çabayı minimize etmektir.**
- İstenen **kar veya gerekli çaba**, **karar değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilir.**
- Optimizasyon sürecinde **amaç fonksiyonunun minimum** veya **maksimum değerini oluşturan şartlar bulunur.**

Klasik optimizasyon

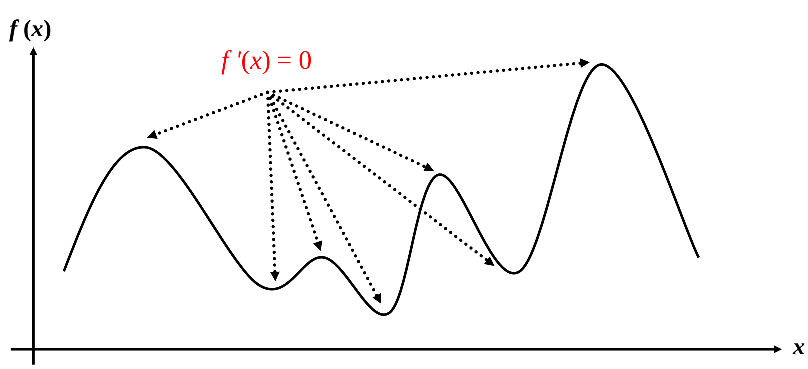
- Klasik optimizasyon yöntemleri **sürekli ve türevlenebilir amaç fonksiyonlarının** optimum çözümünü bulmakta kullanışlıdır.
- Optimum noktanın bulunmasında analitik olan klasik optimizasyon yöntemleri kullanılabilir.
- Amaç fonksiyonu **sürekli ve/veya türevlenebilir olmayan problemlerde** klasik optimizasyon yöntemleri **sınırlı kullanıma sahiptir.**
- **Değişken sayısı arttıkça** problemlerin klasik optimizasyon yöntemleri ile **çözümü zorlaşmakta veya çok uzun süre almaktadır.**

Klasik optimizasyon



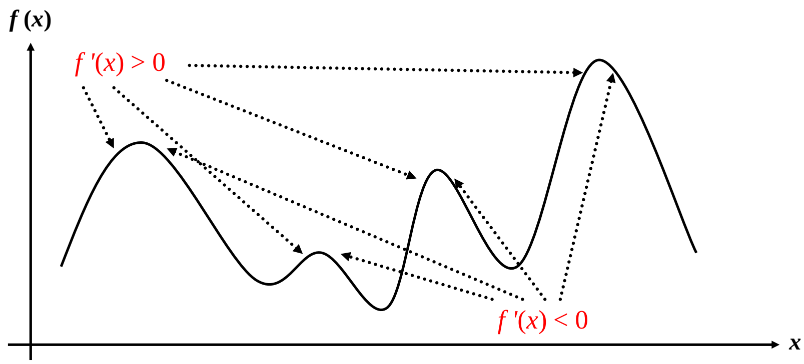
Klasik optimizasyon

- Minimum ve maksimumların bulunmasında amaç fonksiyonunun **1, 2, …, *n*.** dereceden türevleri kullanılır.



Klasik optimizasyon

- **Minimum** noktalarda $f'(x)$ **negatiften pozitife geçer.**
- **Maksimum** noktalarda $f'(x)$ **pozitiften negatife geçer.**
- **Minimum** ve **maksimum** noktalarda $f'(x) = 0$ **olur.**
- $f''(x) > 0$ ise bulunulan nokta **minimum,**
  $f''(x) < 0$ ise bulunulan nokta **maksimumdur.**



İçerik

Tek değişkenli optimizasyon

- Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu için, belirlenen bir h aralığında $f(x^*) \leq f(x^* + h)$ ise, x^* noktasında **lokal minimuma sahiptir.**
- Aynı şekilde, tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu için, belirlenen bir h aralığında $f(x^*) \geq f(x^* + h)$ ise, x^* noktasında **lokal maksimuma sahiptir.**
- Eğer tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonu, tüm x değerleri için
  - $f(x^*) \leq f(x)$ ise, x^* noktasında global minimum
  - $f(x^*) \geq f(x)$ ise, x^* noktasında global maksimum

  değere sahiptir.

Tek değişkenli optimizasyon

- Tek değişkenli optimizasyon problemi için $[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunu minimum/maksimum yapan x^* değeri bulunabilir.

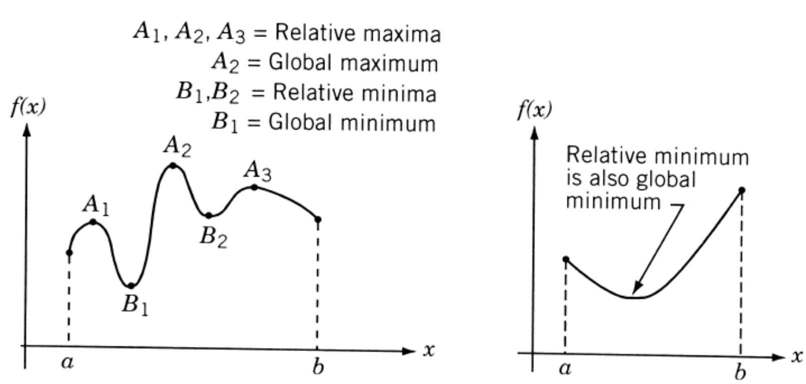
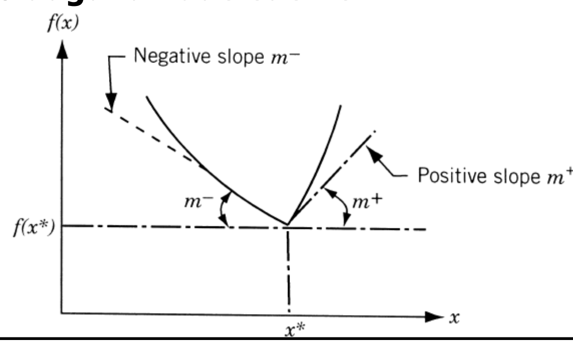


Figure 2.1 Relative and global minima.

Tek değişkenli optimizasyon

Gerekli şart (teorem):

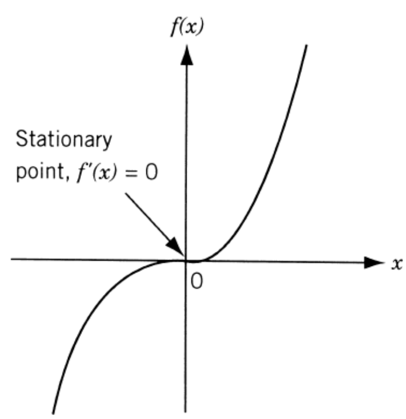
- Eğer $a \le x \le b$ aralığında tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu, bir $x = x^*$ $(a \le x^* \le b)$ noktasında lokal minimuma/maksimuma sahipse ve $f'(x^*)$ türevi varsa,
  $f'(x^*) = 0$ **dır.**
- **Eğer x^* noktasında türev yoksa, teorem minimum veya maksimum olduğunu ifade edemez.**



Tek değişkenli optimizasyon

Gerekli şart (teorem):

- Teorem, $f'(x) = 0$ olan tüm noktalar için, minimum veya maksimum olduğunu kesin olarak ifade etmez (stationary point).



Tek değişkenli optimizasyon

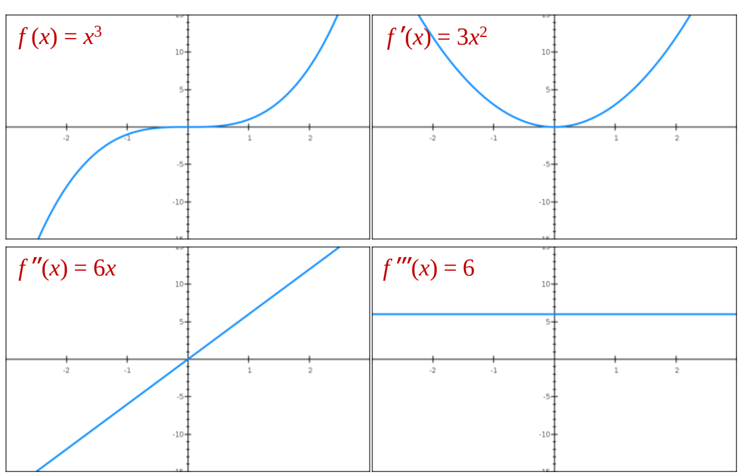
Yeterli şart (teorem):

- $f'(x^*) = f''(x^*) = \ldots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$, ancak $f^{(n)}(x^*) \neq 0$ olsun.
  - Eğer n çift ve $f^{(n)}(x^*) > 0$ ise; $f(x^*)$ **minimum** değere sahiptir.
  - Eğer n çift ve $f^{(n)}(x^*) < 0$ ise; $f(x^*)$ **maksimum** değere sahiptir.
  - Eğer n tek ise; $f(x^*)$ minimum veya maksimum değere sahip değildir (inflection point).

Tek değişkenli optimizasyon

Örnek:

$f(x) = x^3$ fonksiyonunun minimum ve maksimum noktalarını bulalım.



Çözüm:

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0$

$x^* = 0$

$f''(x) = 6x$

$f''(0) = 0$

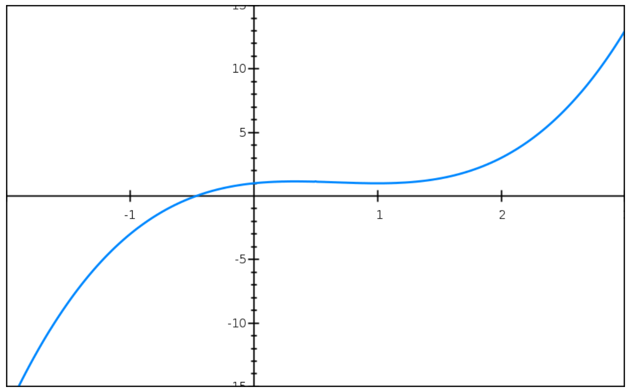
$f'''(x) = 6$

$f'''(x) > 0$ olduğundan (n=3) **inflection point.**

Tek değişkenli optimizasyon

Örnek:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ fonksiyonunun minimum ve maksimum noktalarını bulalım.



Çözüm:

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$(3x - 1)(x - 1) = 0$

$\mathbf{x_1^* = 1/3, \quad x_2^* = 1}$

$f''(x) = 6x - 4$

$f''(1/3) = -2$ **(maksimum)**

$f''(1) = 2$ **(minimum)**

Tek değişkenli optimizasyon

Örnek:

- Aşağıdaki fonksiyonun minimum ve maksimum değerlerini belirleyelim.

$$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$$

Çözüm:

$$f'(x) = 60(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 60x^2(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow x = 0, x = 1, x = 2$$

$$f''(x) = 60(4x^3 - 9x^2 + 4x)$$

$x = 1, f''(x) = -60 \quad x = 1$ relative maximum. $\quad f_{max} = f(x = 1) = 12$

$x = 2, f''(x) = 240 \quad x = 2$ relative minimum. $\quad f_{min} = f(x = 2) = -11$

$x = 0, f''(x) = 0$

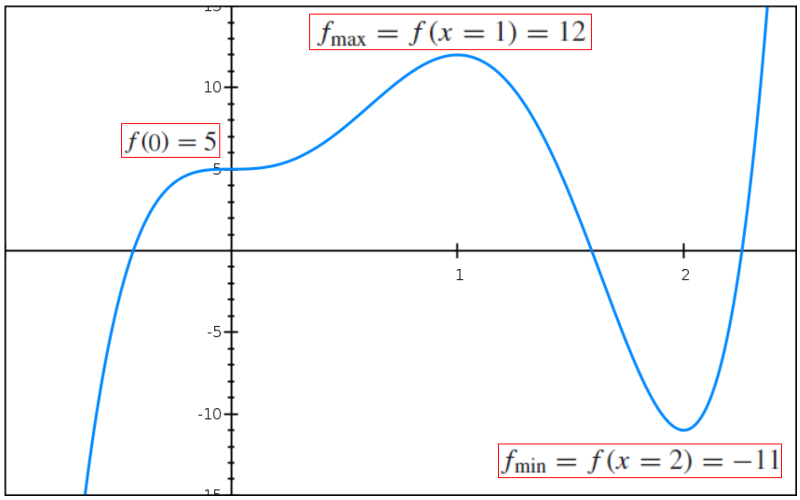
$f'''(x) = 60(12x^2 - 18x + 4) = 240 \qquad x = 0$

$f'''(x) \neq 0 \qquad x = 0$ ***x* = 0 (n=3)** minimum ve maksimum değildir (inflection point)

Tek değişkenli optimizasyon

Örnek:

$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$



Tek değişkenli optimizasyon

Örnek:

- İki aşamalı bir kompresörün çalışması aşağıdaki fonksiyonla ifade edilmiştir. c_p, T_1, k sabit olup; p_1, p_2 ve p_3 basınç değerleridir. Fonksiyonu minimize eden p_2 basınç değerini hesaplayalım.

$$W = c_p T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} + \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{(k-1)/k} - 2 \right]$$

Çözüm:

- p_2'ye göre birinci dereceden türev

$$\frac{dW}{dp_2} = c_p T_1 \frac{k}{k-1} \left[\left(\frac{1}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \frac{k-1}{k} (p_2)^{-1/k} + (p_3)^{(k-1)/k} \frac{-k+1}{k} (p_2)^{(1-2k)/k} \right] = 0$$

$$\boxed{p_2 = (p_1 p_3)^{1/2}}$$

Tek değişkenli optimizasyon

Çözüm:

- p_2'ye göre ikinci türev

$$\frac{d^2W}{dp_2^2} = c_p T_1 \left[-\left(\frac{1}{P_1}\right)^{(k-1)/k} \frac{1}{k}(p_2)^{-(1+k)/k} - (p_3)^{(k-1)/k} \frac{1-2k}{k}(p_2)^{(1-3k)/k} \right]$$

$$\left(\frac{d^2W}{dp_2^2}\right)_{p2=(p1\,p3)^{1/2}} = \frac{2c_p T_1 \dfrac{k-1}{k}}{p_1^{(3k-1)/2k}\, p_3^{(k+1)/2k}}$$

$p_2 = (p_1 p_3)^{1/2}$ için $\dfrac{d^2W}{dp_2^2} > 0$ olduğundan minimum noktadır.

Fonksiyonun $p_2 = (p_1 p_3)^{1/2}$ için minimum değeri

$$\boxed{W_{\min} = 2c_p T_1 \frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{(k-1)/2k} - 1\right]}$$

İçerik

- Klasik optimizasyon
- Tek değişkenli optimizasyon
- Çok değişkenli optimizasyon

Çok değişkenli optimizasyon

Gerekli şart:

- Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun $X = X^*$ noktası minimum veya maksimum ise ve X^* noktasında $f(x)$ fonksiyonunun birinci derece kısmi türevleri varsa,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{X}^*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{X}^*) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{X}^*) = 0$$

Yeterli şart:

- $f(x)$ fonksiyonunun X^* noktasında **ikinci derece kısmi türev matrisi** (Hessian matrisi)
  - **positive definite** ise X^* noktası **minimum**
  - **negative definite** ise X^* noktası **maksimumdur.**

Çok değişkenli optimizasyon

- Hessian matris, amaç fonksiyonunun tüm değişkenlere göre ikinci dereceden kısmi türevi alınarak oluşturulur.

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Çok değişkenli optimizasyon

Yeterli şart:

- **Hessian matrisin positive definite olması için,** tüm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ determinantlarının pozitif olması gereklidir.
- **Matrisin negative definite olması için,** tüm A_j determinant işaretlerinin $(-1)^j$ olması gereklidir (sign(A_j) = sign$(-1)^j$).
- Diğer durumlarda semidefinite olarak tanımlanır.

$$A = |a_{11}|,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Çok değişkenli optimizasyon

Örnek:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_2 x_3 - 2x_1x_3 + 4x_1 + 10$
fonksiyonunun minimum olduğu noktaları bulalım.

Çözüm:

$\nabla f(x) = 0, \quad \partial f / \partial x_1 = 0 \quad \partial f / \partial x_2 = 0 \quad \partial f / \partial x_3 = 0$

$2x_1 - 2x_3 + 4 = 0 \qquad x_1 = -10$

$-2x_2 - x_3 = 0 \qquad x_2 = 4$

$2x_3 - x_2 - 2x_1 = 0 \qquad x_3 = -8$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$H_1 = 2$

$H_2 = -4$

$H_3 = -2$

$f(-10, 4, -8)$ geçiş noktasıdır.

Çok değişkenli optimizasyon

Örnek:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 12x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 100$
fonksiyonunun minimum olduğu noktaları bulunuz.

Çözüm:

$\nabla f(x) = 0, \quad \partial f/\partial x_1 = 0 \quad \partial f/\partial x_2 = 0 \quad \partial f/\partial x_3 = 0$

$3x_1^2 - 12 = 0 \qquad x_1 = 2, -2$

$2x_2 - 8 = 0 \qquad x_2 = 4$

$2x_3 - 12 = 0 \qquad x_3 = 6$

$f(2, 4, 6)$ minimum,
$f(-2, 4, 6)$ geçiş noktasıdır.

$$H = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$H_1 = 12\ (2), -12\ (-2)$

$H_2 = 24\ (2), -24\ (-2)$

$H_3 = 48\ (2), -48\ (-2)$

Çok değişkenli optimizasyon

Örnek:

- Aşağıdaki eşitlikte U değerini minimum yapan x_1 ve x_2 değerlerini bulalım (k_1, k_2, k_3 ve P pozitif sabit).

$$U = [\tfrac{1}{2}k_2 x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_3(x_2 - x_1)^2 + \tfrac{1}{2}k_1 x_2^2] - P x_2$$

Çözüm:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = k_2 x_1 - k_3(x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k_3(x_2 - x_1) + k_1 x_2 - P = 0$$

$$x_1^* = \frac{P k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}$$

$$x_2^* = \frac{P(k_2 + k_3)}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}$$

Çok değişkenli optimizasyon

Çözüm: $\boxed{U = [\frac{1}{2}k_2 x_1^2 + \frac{1}{2}k_3(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_1\, x_2^2] - P x_2}$

- x_1^* ve x_2^* için Hessian matrisi hesaplanır.

$$\mathbf{J}\Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{(x_1^*, x_2^*)} = \begin{bmatrix} k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_1 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = |k_2 + k_3| = k_2 + k_3 > 0$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_1 + k_3 \end{vmatrix} = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 > 0$$

- $\mathbf{J}$ matrisi pozitif olduğundan x_1^* ve x_2^* değerlerinde fonksiyon minimum değere sahiptir.

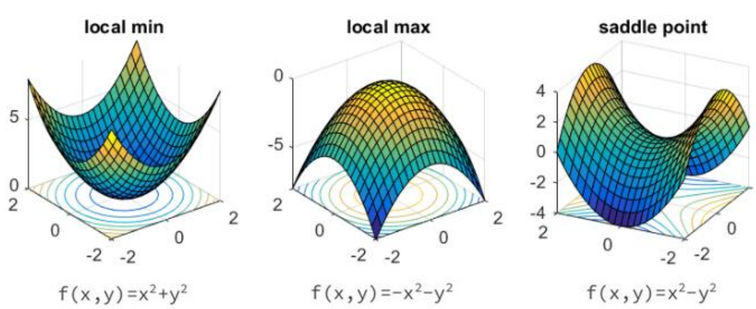
Çok değişkenli optimizasyon

Eyer noktası:

- Eğer bir $f\,(x, y)$ fonksiyonu için birinci derece kısmi türevin,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

olduğu (x^*, y^*) noktasında **Hessian matrisi** her iki değişken için birden pozitif veya negatif değilse, (x^*, y^*) noktası **eyer noktası** (saddle point) olarak adlandırılır.



Çok değişkenli optimizasyon

Örnek:

- Aşağıdaki fonksiyonun extreme noktalarını bulalım.

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 2x_1^2 + 4x_2^2 + 6$$

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 4x_1 = x_1(3x_1 + 4) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 + 8x_2 = x_2(3x_2 + 8) = 0$$

Extreme noktalar $(0, 0), \quad (0, -\frac{8}{3}), \quad (-\frac{4}{3}, 0), \quad (-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3})$

Hessian matrisi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_2 + 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 + 8 \end{bmatrix}$$

Çok değişkenli optimizasyon

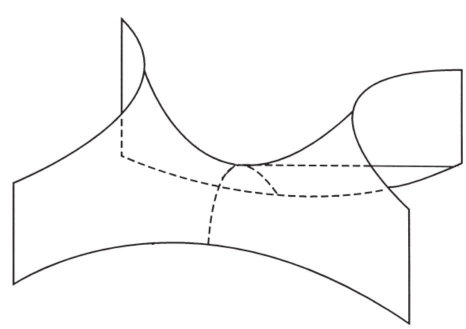
Çözüm:

Hessian matrisin minor determinantları

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 + 8 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = |6x_1 + 4|$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 6x_1 + 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 + 8 \end{vmatrix}$$



Minor determinantların analizi

Point $\mathbf{X}$	Value of J_1	Value of J_2	Nature of $\mathbf{J}$	Nature of $\mathbf{X}$	$f(\mathbf{X})$
$(0, 0)$	$+4$	$+32$	Positive definite	Relative minimum	6
$(0, -\frac{8}{3})$	$+4$	-32	Indefinite	Saddle point	418/27
$(-\frac{4}{3}, 0)$	-4	-32	Indefinite	Saddle point	194/27
$(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3})$	-4	$+32$	Negative definite	Relative maximum	50/3

Çok değişkenli optimizasyon

Örnek:

- Aşağıdaki eşitlikte $f(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonunun verilen kısıt ile maksimum değerini bulalım.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1x_2x_3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Çözüm:

- Fonksiyonu $f(x_1, x_2)$ şeklinde yazalım.

$$x_3 = (1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}$$

$$f(x_1, x_2) = 8x_1x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_2\left[(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2} - \frac{x_1^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_1\left[(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2} - \frac{x_2^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}}\right] = 0$$

$$\rightarrow \quad 1 - 2x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad 1 - x_1^2 - 2x_2^2 = 0$$

Çok değişkenli optimizasyon

Çözüm: $\boxed{f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1x_2x_3}$ $\boxed{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1}$

$$1 - 2x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad 1 - x_1^2 - 2x_2^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1^* = x_2^* = 1/\sqrt{3} \qquad x_3^* = 1/\sqrt{3}$$

- x_1^*, x_2^* *ve* x_3^* noktası minimum mu yoksa maksimum mu?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -\frac{32}{\sqrt{3}} \text{ at } (x_1^*, x_2^*)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{32}{\sqrt{3}} \text{ at } (x_1^*, x_2^*)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{16}{\sqrt{3}} \text{ at } (x_1^*, x_2^*)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 > 0$$

Hessian matrisi negative definite'tir.
sign(A_j) = sign$(-1)^j$, **($A_1 < 0$, $A_2 > 0$)**
x_1^*, x_2^* maksimumdur.

$$\boxed{f_{max} = \frac{8}{3\sqrt{3}}}$$

Ödev

- Çok amaçlı ve çok değişkenli optimizasyon uygulamasını içeren bir makale için ödev hazırlayınız.